## 6.1.5 Absolutní hodnota komplexního čísla

**Předpoklady:** 6104

Absolutní hodnota reálného čísla: $|x|=\sqrt{x^2}$ $\Rightarrow$

- vždy nezáporné číslo,
- vzdálenost na číselné ose od počátku.

Jak zavést absolutní hodnotu v komplexních číslech?
Udělat nezáporné číslo z komplexního čísla už umíme: $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.
Je to ono?

Zkusíme na $z=a+0i$:

- Vyrobíme ji komplexně: $z\cdot\overline{z}=(a+0i)(a-0i)=a^2$.
- Vyrobíme ji reálně: $\sqrt{a^2}$.

$\Rightarrow$ Abychom získali stejný výsledek, musíme výraz $z\cdot\overline{z}$ odmocnit (půjde to bez problémů, protože jde o reálné číslo). $\Rightarrow$

Absolutní hodnota komplexního čísla *z* je číslo $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

$|-2+i|$: reálná část $a=-2$, imaginární část $b=1 \Rightarrow |-2+i|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

**Př. 1:** Urči absolutní hodnotu z komplexních čísel:
a) $2+3i$ b) $2-3i$ c) $-1-i2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{7}-i\sqrt{6}$

a) $|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ b) $|2-3i|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

c) $|-1-i2\sqrt{3}|=\sqrt{(-1)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$ d) $|\sqrt{7}-i\sqrt{6}|=\sqrt{(\sqrt{7})^2+(-\sqrt{6})^2}=\sqrt{13}$

$\Rightarrow$ Několik naprosto odlišných komplexních čísel má stejnou absolutní hodnotou $\Rightarrow$ komplexních čísel s absolutní hodnotou $\sqrt{13}$ je zřejmě nekonečně mnoho $\Rightarrow$ komplexní čísla asi nepůjde uspořádat podle velikosti.

**Pedagogická poznámka:** Existuje poměrně značné množství studentů, kteří berou imaginární jednotku jako součást imaginární části komplexního čísla,do vzorce dosazují takto $|2+3i|=\sqrt{2^2+(3i)^2}=\sqrt{4+9i^2}=\sqrt{4-9}=\sqrt{-5}$ a pak křičí: „Kde chyba?“
Nezbývá než opakovat, že imaginární část je pouze to, co je před *i*. Tento příklad je každopádně dobré místo na jejich odchycení.

**Př. 2:** Najdi alespoň tři další komplexní čísla *z* taková, aby platilo $|z|=\sqrt{13}$.

Hledáme taková čísla, aby součet jejich druhých mocnin byl roven 13.

$13 = 8 + 5 \Rightarrow z = 2\sqrt{2} - i\sqrt{5}$ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)
$13 = 2 + 11 \Rightarrow z = \sqrt{2} - i\sqrt{11}$ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)
$13 = 10 + 3 \Rightarrow z = \sqrt{10} + i\sqrt{3}$ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)

**Př. 3:** Vypočti:

a) $\left|\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)\right|$ b) $\left|\frac{2 + 2i}{1 - i}\right|$

a)

$$\left|\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right)\right| = \left|\sqrt{6} + 2i - i\sqrt{3} - i^2\sqrt{2}\right| = \left|\sqrt{6} + \sqrt{2} + \left(2 - \sqrt{3}\right)i\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6 + 2\sqrt{12} + 2 + 4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{15 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} = \sqrt{15}$$

b)

$$\left|\frac{2 + 2i}{1 - i}\right| = \left|\frac{2 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i}\right| = \left|\frac{2 + 2i + 2i + 2i^2}{1 + 1}\right| = \left|\frac{4i}{2}\right| = |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

**Pedagogická poznámka:** Bod a) působí velké problémy. žáci sice dokáží roznásobit závorky, ale dosazení do vzorce pro absolutní hodnotu jim činí problémy.

Předchozí výpočty mohou značně zjednodušit vzorce pro výpočet absolutní hodnoty.

- **Pro libovolná komplexní čísla $z_1$, $z_2$ platí: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.**
- **Pro libovolná komplexní čísla $z_1$, $z_2 \neq 0$ platí: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.**

**Př. 4:** Vypočti s využitím vzorců pro výpočet absolutní hodnoty:

a) $\left|\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right)\right|$ b) $\left|\frac{2 + 2i}{1 - i}\right|$ c) $\left|\frac{2i + |1 + 2i|}{|1 + i|i + 2}\right|$

a)

$$\left|\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right)\right| = \left|\sqrt{2} - i\right|\left|\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

b)

$$\left|\frac{2 + 2i}{1 - i}\right| = \frac{|2 + 2i|}{|1 - i|} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$$

c)

$$\left|\frac{2i + |1 + 2i|}{|1 + i|i + 2}\right| = \left|\frac{2i + \sqrt{1^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}i + 2}\right| = \left|\frac{\sqrt{5} + 2i}{2 + i\sqrt{2}}\right| = \frac{\left|\sqrt{5} + 2i\right|}{\left|2 + i\sqrt{2}\right|} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

**Př. 5:** Petáková:
strana 136/cvičení 22 c) d)

strana 136/cvičení 23 c) e) f)
strana 136/cvičení 24 a)

**Př. 6:** (BONUS) Dokaž pravidla pro výpočet absolutní hodnoty.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)\overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}}\sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{z_1}{z_2} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}} = \sqrt{\frac{z_1 \overline{z_1}}{z_2 \overline{z_2}}} = \frac{\sqrt{z_1 \overline{z_1}}}{\sqrt{z_2 \overline{z_2}}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

**Př. 7:** Vypočti:

a) $|i|$ b) $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$ c) $\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right|$ d) $\left|\frac{1+2i}{2+i}\right|$

a) $|i| = \sqrt{1^2} = 1$

b) $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

c) $\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

d) $\left|\frac{1+2i}{2+i}\right| = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

Absolutní hodnota všech čísel z předchozího příkladu se rovnala 1 $\Rightarrow$ říkáme jim komplexní jednotky.
**Komplexní jednotka je takové komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné.**

**Př. 8:** Petáková:
strana 136/cvičení 26 c) f)
strana 136/cvičení 28
strana 136/cvičení 29 a)

**Př. 9:** Urči, pro která reálná čísla $a$ je komplexní číslo $\frac{-2-a+ia}{1+ia}$ číslo:

a) reálné, b) imaginární, c) ryze imaginární.

Musíme upravit zlomek do algebraického tvaru:

$$\frac{-2-a+ia}{1+ia} = \frac{-2-a+ia}{1+ia} \cdot \frac{1-ia}{1-ia} = \frac{-2-a+ia+2ia+ia^2-i^2a^2}{1-i^2a^2} = \frac{-2-a+a^2+3ia+ia^2}{1+a^2} =$$

$$= \frac{-2-a+a^2}{1+a^2} + \frac{a^2+3a}{1+a^2}i$$

**a) reálné číslo** $\Rightarrow$ imaginární část se rovná nule $\Rightarrow$ $a^2 + 3a = a(a+3) = 0$

$a_1 = 0$, $a_2 = -3$

**b) imaginární číslo** $\Rightarrow$ imaginární část není nulová $\Rightarrow$ $a \in R - \{-3; 0\}$

**c) ryze imaginární číslo** $\Rightarrow$ reálná část je nulová $\Rightarrow$ $a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0$

$a_3 = -1$, $a_4 = 2$

**Př. 10:** Petáková:
strana 134/cvičení 7
strana 134/cvičení 9

**Shrnutí:** $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ (opět přepona v pravoúhlém trojúhelníku pomocí Pythagorovy věty).